Szego kernel and a global invariant of CR manifolds(Microlocal Analysis and its Applications)

平地, 健吾

数理解析研究所講究録
750巻 1991年 123-133

Szegö kernel and a global invariant of CR manifolds

大阪大・理 平地健吾

本文では、Szegö 核と強擬凸領域の双正則不変量の関係を考察する。Bergman 核については、Fefferman [F1, 2], Graham [G], Boutet de Monvel [B1, 2] 等において詳しく研究されている。そして、それらの多くは、Szegö 核に対しても適用できる。ここでは、Bergman 核の analogy としてえられる結果だけでなく、Szegö 核独自の性質も調べる。その結果 Szegö 核から領域の(さらに CR 多様体の)大域的な不変量(の候補)が定義できることを示す。今、"の候補" と書く理由は §4 において説明する。

この研究は、Fefferman [F2] において提案された program に沿っている。まず、その説明をしながら、強擬凸領域の幾何(CR 多様体の幾何)、そして Bergman 核, Szegö 核の基本的な性質を復習する。

1. Fefferman の Program (cf. [F2], [B-F-G])

n 次元 Rieman 多様体 (M, g) 上での熱方程式の基本解

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) H_t(x,y) = 0 \\ \lim_{t \searrow 0} H_t(x,y) = \delta_y(x) \end{cases}$$

は、$t \searrow 0$ のとき、次の漸近展開をもつ.

(1.1) $$H_t(x,x) \sim \text{const} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{-\frac{n}{2}+k}(x)\; t^{-\frac{n}{2}+k}.$$

ここに現われる係数 $\phi_j(x)$ を計算するには、Weyl, Gilkey による不変式論を用いることができる。それにより、ϕ_j を、Levi-Civita接続の曲率のWeyl不変式で書くことができる。

熱核のanalogyとして、Bergman核およびSzegö核の解析を行なおうとするのがFeffermanのProgramである。$\mathbb{C}^n$ 内の有界領域 Ω に対して、そのBergman核は、$L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \cap \{\Omega$ 上の正則函数$\}$ 直交射影子の$\underbrace{\text{核函数}}_{B(z,\bar{w})}$として定義される。従って L^2- 正則函数 f に対しては、

$$f(z) = \int_{\Omega} B(z,\bar{w}) f(w) \, |dw|^2 \quad \forall z \in \Omega$$

が成り立つ。Szegö核は、境界 $\partial\Omega$（今、$\partial\Omega$ は C^∞ 多様体になっているとする）上のVolume $d\sigma$ を一つ与えるとき、$L^2(\partial\Omega, d\sigma) \longrightarrow L^2(\partial\Omega, d\sigma) \cap \{\Omega$上の正則函数の L^2 境界値$\}$ 直交射影の核函数として定義する。

領域が強擬凸であり、滑らかな定義函数 r, $\Omega = \{r > 0\}$ をもつときには、$B(z,\bar{z})$ および $S(z,\bar{z})$ の境界での漸近展開は、

$$
(1.2) \qquad \begin{aligned} B &= \tilde{\varphi}\, r^{-n-1} + \tilde{\psi}\, r \log r, \quad \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in C^\infty(\overline{\Omega}), \\ S &= \varphi\, r^{-n} + \psi\, r \log r, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\overline{\Omega}). \end{aligned}
$$

という型をしている。また $\tilde{\varphi}|_{\partial\Omega} \neq 0$, $\varphi|_{\partial\Omega} \neq 0$ である。今微分同相、$\{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 \leq r(z) < \varepsilon\} \cong \{(x, r);\ x \in \partial\Omega,\ 0 \leq r < \varepsilon\}$ を一つ固定し、核函数を $\partial\Omega \times [0, \varepsilon)$ 上の函数と見るとき、(1.2)は（Szegö核について書く）

$$
(1.3) \qquad S(x, r) \sim \sum_{k=0}^{n} \varphi_{-k}(x)\, r^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\, r^k \log r
$$

と書ける。Bergman核の展開に現われる係数は、不変式論を用いて、(そのいくつかは)決定することができる。ここで、Levi-Civita接続に対応するのは、Chern-Moser invariantであり、そのWeyl invariantを用いて、$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ を、あるところまで具体的に表示することができる。

Szegö核を考えるときには、問題は少し難かしくなる。それは、Szegö核の定義にはVolume $d\sigma$ のとり方が関係しているからである。Fefferman [F2] はMonge-Ampère作用素を用いて、volumeを、うまくとり（Szegö核がBergman核と同様な変換則をもつようにし）Bergman核の展開の表示に用いた不変式論が、Szegö核にも適用できることを示している。

2. 大域的な不変量.

我々は、Volumeのとり方を指定するのでなく、そのとり方によらないSzegö核の性質をとり出すことを考える。

もう一度、熱核の場合にもどって説明しよう。漸近展開(1.1)をM上で積分すれば

$$(2.1)\qquad \mathrm{trace}\, e^{-t\Delta} \sim c_n \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{n}{2}+k} \int_M \phi_{-\frac{n}{2}+k}\, dvol$$

をえる。とくにnが偶数であれば、Gauss-Bonnetの定理（このとき、熱核は、微分型式の上に作用すると思う）

$$(2.2)\qquad \chi(M) = c_n \int_M \phi_0(x)\, dvol$$

がえられる。ここで、右辺内のϕ_0は計量gのとり方によってきまる函数であるが、その（同じ計量gによる）積分の値は、計量のとり方によらない、位相的な量、オイラー数である。

Szegö核についても同様な積分を考えてみる。

$$(2.3)\qquad \int_{\partial\Omega} S(x,x)\, d\sigma(x) \sim \sum_{k=0}^{n} \int \varphi_{-k}\, d\sigma \cdot r^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \int \varphi_k\, d\sigma \cdot r^{k} \log r$$

(2.1)においてt^0の係数をとり出したのと同様に、今度は、$r^0 \log r$ の係数

$$(2.4)\qquad \int_{\partial\Omega} \varphi_0\, d\sigma$$

これが、領域Ωの大域的な不変量を与えることが予想される。熱核の場合には、DeRham complex の index として(2.2)がえられたが、Szegö核については、そのような対応は知られていない。しかし、次が成り立つ。

定理　積分値(1.7)は、境界$\partial\Omega$上の Volume $d\sigma$ のとり方によらない。従って、領域Ωの双正則不変量になる。

すなわち、Volume $d\sigma$を一つ与え、Szegö核を定義し、その展開の係数ψ_0をとり出し、それを、同じ Volume $d\sigma$で積分すると、その値は、最初に与える volume のとり方によらないのである。

3. 定理の証明の idea.

まず、形式的な計算を行う。領域の境界は、実解析的であり、$r(z,\bar{z})=0$ で定義されているとする。このとき、正則函数 f に対して Szegö核の再生性は、

$$f(z)=\int_{\partial\Omega} S(z,\bar{w})f(w)\,d\sigma(w)$$

と書ける。境界での積分は、δ-函数を用いて表わせば、

$$=\int S(z,\bar{w})\,\delta(r(w,\bar{w}))\,f(w)\,|dw|^2$$

wと$\bar{w}$を独立変数と見て、積分順序をかえれば、

$$f(z) = \int \left[\int S(z,\zeta)\,\delta(r(w,\zeta))\,d\zeta \right] f(w)\,dw$$

これが，各正則函数 f について成り立つので，

(3.1) $$\int S(z,\zeta)\,\delta(r(w,\zeta))\,d\zeta = \delta(z-w).$$

ここで、定義函数 r のとり方が、volume $d\sigma$ のとり方に対応していることに注意しよう。

今、定義函数 r_t がパラメータ t に依存して変化するとする。$\delta(r_t)$ によってきまる volume により定義される Szegö 核を、S_t で書くことにする．このとき、(3.1) を t について微分すると、

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial t} S_t(z,\zeta)\,\delta(r_t(w,\zeta)) + S_t(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\delta(r_t(w,\zeta)) \right] d\zeta = 0$$

をえる。$\frac{\partial}{\partial t}\delta(r_t(w,\zeta)) = R(t,\zeta,\partial_\zeta)\,\delta(r_t(w,\zeta))$ を満たすミクロ微分作用素 R をとると、(cf. [K]) 部分積分により

$$\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - R^*(t,\zeta,\partial_\zeta)\right) S_t(z,\zeta) \right] \cdot \delta(r_t(w,\zeta))\,d\zeta = 0.$$

ここで R^* は R の adjoint である。従って Szegö 核は、

(3.2) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - R^*(t,\zeta,\partial_\zeta)\right) S_t(z,\zeta) = 0$$

をみたす。

(1.3) において、Szegö 核および、その展開の係数が、

すべて、パラメータ t に依存して動くとするとき、(1.3) を t で微分し、z で積分し、(3.2)を用いれば、左辺は、$r^0 \log r$ の項をもたないことが示される。(展開に用いる定義函数は、t によらないように一つ固定しておく。) したがって、右辺の $r^0 \log r$ の係数

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial\Omega}(\varphi_t)_0 \, d\sigma_t = 0$$

が示される。任意の2つの volume は直線でつなぐことができるので、すべての volume に対して、(2.4) が同じ値をとることがわかる。

以上の計算は、すべての式を micro-local に考えることにより正当化できる。すなわち、境界をこえて解析接続できる正則函数を modulo として考える。このとき、たとえば、Szegö核は 正則ミクロ函数とみなされる。(cf, 柏原 [K], 金子 [Kan])。

今まで、境界の実解析性を仮定したが、一般の領域も、そのような領域で、近似することにより、定理が証明される。

4. 定理で与えられた不変量は trivial ではないのか？

$\mathbb{C}^2$ 内の領域については、(2.4) の値は 0 になることが示される。それは次の表示を見ればわかる。(これは、不変式論を用いて証明される。)

$$(4.1) \qquad \varphi_0 = \mathrm{const}\left(\Delta_b R - 2\,\mathrm{Im}\, A_{11,\bar{1}\bar{1}}\right)$$

ここで $\mathrm{const} \neq 0$, R, $A_{11,\bar{1}\bar{1}}$ はおのおの、volume $d\sigma$（あるいは $d\sigma = \theta \wedge d\theta$ となる contact form θ）によってきまる. CR-bundle $T^{1,0}$ 上の田中-Webster接続 (see [W]) の曲率および、Torsion の共変微分である. (4.1) を積分すれば、Stokes の定理により $\int_{\partial\Omega} \varphi_0 \, d\sigma = 0$ が示される。

実は、$\varphi_0|_{\partial\Omega} = 0$ となるように volume を選ぶことが可能である。

$$(4.2) \qquad d\sigma = \left(\det \begin{pmatrix} r & \partial r/\partial z_j \\ \partial r/\partial \bar{z}_k & \partial^2 r/\partial z_j \partial \bar{z}_k \end{pmatrix} \right)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{Re}(\partial r \wedge \partial\bar{\partial} r)\Big|_{\partial\Omega}$$

とればよい. これは Fefferman [F2] によって与えられたもので、Graham [G] の不変式論を用いれば、$\varphi_0 = 0$ が示される。これは、$\mathbb{C}^2$ 内の領域が、境界上の各点において、球面の双正則写像の像により、5次まで近似できるという事実に関係している。球においては、Szegő核は対数項をもたない、そして、$\mathbb{C}^2$ 内の強擬凸領域の境界は球面で十分に近似できるので、φ_0 は 0 になるのである。

$n \geqq 3$ のときには、領域の境界は一般には、球面によって3次までしか近似できない。従ってこんどは、(4.2) のようなよい volume をえらんでも一般には $\varphi_0 = 0$ になるとは限らない。とくに $\mathbb{C}^3$ の場合には具体的な計算ができてい

る。$\Omega \subset \mathbb{C}^3$ は 0 を境界に含み、その近傍において、Moser's normal form [C-M]

$$u > |z|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta| \geq 2 \\ \gamma \geq 0}} A^{\gamma}_{\alpha\beta} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} v^{\gamma},$$

ここで $z=(z_1, z_2)$, $w=u+iv$, で表わされているとしよう。このとき、Szegö核（[F2] P259 で与えられる volume によって定義されたもの）の対数項の原点での値は、

$$\varphi_0 \Big|_{(z,w)=((0,0),0)} = \text{const} \Big[2 \sum_{i,j,k,l,m=1}^{2} | A^0_{ijk\bar{l}\bar{m}} |^2$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{i,j,k,l,m=1}^{2} A_{ijk,\bar{i}\bar{l}} A_{ml\bar{m}\bar{j}\bar{k}}$$

$$+ 3 \sum_{i,j,k,l,m=1}^{2} A_{ij\bar{k}\bar{l}} A_{mkl\bar{m}\bar{i}\bar{j}} \Big]$$

const $\neq 0$ である。$A^{\gamma}_{p,q} = \{ A^{\gamma}_{\alpha,\beta} \}_{|\alpha|=p, |\beta|=q}$ を symmetric tensor と思い、計量 $\delta_{i\bar{j}}$ で trace, norm を定義するとき、(cf. [C-M]) 上式は

$$2 \| A^0_{3\bar{2}} \|^2 - \frac{3}{2} \| \text{trace}\, A^0_{3\bar{2}} \|^2 - 9\, \text{trace}^5 \left(A^0_{2\bar{2}} \otimes A^0_{\bar{3}3} \right)$$

と書ける。この式により一点ごとの値はわかるが、それを各点で行い積分するのは容易ではない。今のところ、homogeneous なCR多様体について、計算を行ったが、その場合に

は、$\varphi_0=0$ になってしまい、(2.4) は 0 になる。φ_0 の表示からわかるように、ほとんどの領域において 0 にならないはずであり、その積分が計算できる例をまだ知らない。

筆者は、この積分が trivial でないと思っている。(もし常に 0 になるのであれば、なぜそうなるのか、興味のある問題である。)

References

[B-F-G] Beals, M., Fefferman, C. and Grossman, R., *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Bull. A.M.S. **8** (1983), 125–322.

[B1] Boutet de Monvel, L., *Complément sur le noyau de Bergman*, Séminaire équations aux dérivées partielles 1985-86, Ecole Polytech. Paris.

[B2] Boutet de Monvel, L., *Le noyau de Bergman en dimension* 2, Séminaire équations aux dérivées partielles 1987-88, Ecole Polytech. partielles.

[C-M] Chern, S. S. and Moser, J., *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[F1] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[F2] Fefferman, C., *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[G] Graham, C. R., *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, in Complex analysis II, Lecture Notes in Math. 1276, Springer,1987, pp.108-135.

[Kan] Kaneko, A., *Introduction to Kashiwara's microlocal analysis for the Bergman kernel*, Lecture Notes in Math., Korea Advanced Institute of Science and Technology (1989).

[K] Kashiwara, M., *Analyse micro-locale du noyau de Bergman*, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, Ecole Polytech. Paris.

[W] Webster, S. M., *Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. **13** (1978), 25–41.